

## FEM-LBM-IBM 流固耦合

### 1.1 FEM 有限元模型

#### 1.1.1 弹性叶片控制微分方程

转子叶片的可以简化为根部固定约束的弹性梁，如图 19 所示。该条件下，我们将仅考虑平面外弯曲（flap bending）。以伯努利 - 欧拉假设为基础：垂直于中性轴的平面截面在变形后仍保持平面。还假设剪切挠度可以忽略不计，旋转惯性可以忽略。这意味着，元件的旋转的影响相比垂直位移要小的多。此外，我们还将忽略了结构阻尼。考虑到实际工程中叶片满足横截面尺寸远小于长度的建模要求。同时，长叶片对结构损伤通常是由于外弯造成。因此，我们将叶片视为细长梁是合适的。基于这些假设，我们准备导出弹性叶片控制微分方程。

考虑如图 20 所示的叶片截面。其中  $f_z(r,t)$  是单位长度的垂直载荷， $w(r,t)$  是位置  $r$  上的垂直挠度。主要有 6 个力作用在该叶片单元上：惯性力  $mw''dr$ ，外力  $f_z dr$ ，平行于  $r$  的轴向力  $f_H dr$ ， $T$  是轴向张紧力， $S$  是在轴向上的剪切力， $M$  为弯矩。 $\frac{dw}{dr}$  为弯曲挠度。在小挠度假设下，三角函数  $\cos(\frac{dw}{dr}) \approx 1, \sin(\frac{dw}{dr}) \approx \frac{dw}{dr}$ 。

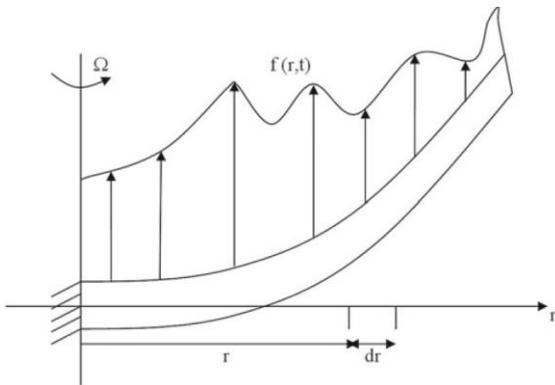


图 19 弹性叶片分布力示意

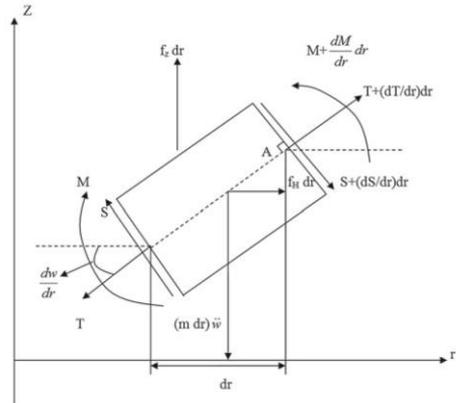


图 20 弹性叶片力学分析

在  $r$  方向上，力学平衡有：

$$\begin{aligned} \sum F_r &= -T + T + \frac{dT}{dr} dr + f_H dr - S \frac{dw}{dr} + \left( S + \frac{dS}{dr} dr \right) \left( \frac{dw}{dr} + \frac{d^2w}{dr^2} dr \right) = 0 \\ &\Rightarrow \frac{dT}{dr} + f_H + \frac{d}{dr} \left( S \frac{dw}{dr} \right) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

在  $z$  方向上，力学平衡有：

$$\begin{aligned}\Sigma F_z &= f_z dr + S - S - \frac{dS}{dr} dr - mw'' dr - T \frac{dw}{dr} + \left(T + \frac{dT}{dr}\right) \left(\frac{dw}{dr} + \frac{d^2w}{dr^2} dr\right) = 0 \\ &\Rightarrow f_z - \frac{dS}{dr} - mw'' + T \frac{d^2w}{dr^2} + \frac{dT}{dr} \frac{dw}{dr} = 0\end{aligned}\quad (2)$$

上式表明剪切力的微分是载荷分布。

接下来是 A 点的矩平衡：

$$\Sigma M = M + Sdr - M - \frac{dM}{dr} dr = 0 \Rightarrow \frac{dM}{dr} = S \quad (3)$$

上式表明力矩的微分是剪切力。

根据梁的挠度方程：

$$M = EI \frac{d^2w}{dr^2} \quad (4)$$

结合上面三个公式，可得弯曲梁的微分方程：

$$S = \frac{dM}{dr} = \frac{d}{dr} EI \frac{d^2w}{dr^2} \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial^2 r} (EI \frac{\partial^2 w}{\partial^2 r}) + m \frac{\partial^2 w}{\partial^2 t} - \frac{\partial}{\partial r} (T \frac{\partial w}{\partial r}) = f_z(r, t) \quad (6)$$

其中， $I = bh^3/12$ 与横截面积相关( $m^4$ )， $E$ 为杨氏模量 (Gpa)， $m$ 为单位质量 (Kg/m)。

### 1.1.2 边界条件

控制微分方程为四阶偏微分方程，需要四个边界条件。我们选择一端固定，一端自由的边界条件，即：

$$w_0 = 0; \frac{dw_0}{dr} = 0 \quad (7)$$

$$M = EI \frac{d^2w}{dr^2} = 0; S = \frac{d}{dr} (EI \frac{d^2w}{dr^2}) \quad (8)$$

### 1.1.3 有限元方法

接下来，我们从利用变分思想，通过有限元方法从能量守恒的观点分析上述问题。我们将使用基于位移的有限元分析。简单通过三个单元的例子来说明有限元的思想，如图 21 所示。

从该图中，我们可以看到有 4 个关节，称为节点。每个节点都有两个自由度：垂直位移和旋转，因此，在图中，总共有八个节点自由度 (dof)： $q_{1-8}$

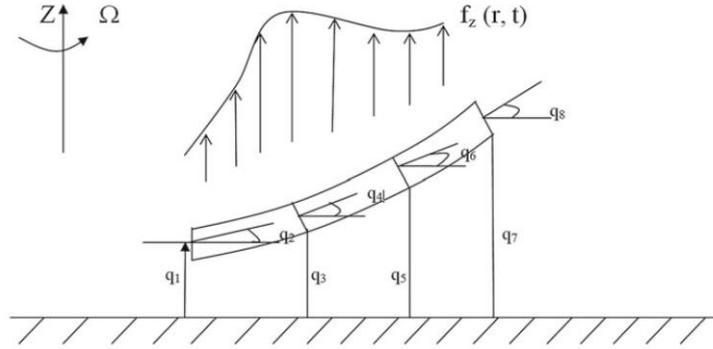


图 21 有限元三单元分析示意

现在我们将简要说明有限元分析中的两个主要步骤：1.单元建模 2.矩阵组装

### 1.1.4 单元建模

首先，考虑单元的动能方程：

$$T = \frac{1}{2 \int_0^l m w'^2 dx} = \frac{1}{2 \int_0^l (\sum_{i=1}^4 H_i q_i') (\sum_{i=1}^4 H_i q_i') dx} = 1/2 \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 m_{ij} q_i' q_j' \quad (9)$$

其中，质量矩阵  $m_{ij} = \int_0^l m H_i H_j dx$ 。

$H$  为基函数，为满足边界条件下的多项式函数，也称为振型函数。

接下来，考虑单元的势能或应变能：

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l T(x) \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left[ \sum_{i=1}^4 \frac{d^2 H_i}{dx^2} q_i \right] \left[ \sum_{j=1}^4 \frac{d^2 H_j}{dx^2} q_j \right] dx + \frac{1}{2} \int_0^l T(x) \left[ \sum_{i=1}^4 \frac{dH_i}{dx} q_i \right] \left[ \sum_{j=1}^4 \frac{dH_j}{dx} q_j \right] dx = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 K_{ij} q_i q_j \quad (10)$$

其中， $K_{ij} = \int_0^l EI \frac{d^2 H_i}{dx^2} \frac{d^2 H_j}{dx^2} dx + \int_0^l T(x) \frac{dH_i}{dx} \frac{dH_j}{dx} dx$  为刚度矩阵。

除此之外，还有外力带来的虚功：

$$\delta W = \int_0^l f_z \delta w dx = \int_0^l f_z \sum_{i=1}^4 H_i \delta q_i dx = \sum_{i=1}^4 Q_i \delta q_i \quad (11)$$

其中， $Q_i = \int_0^l f_z H_i dx$



$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & m_{18} \\ m_{21} & m_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & m_{28} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m_{81} & m_{82} & \cdot & \cdot & \cdot & m_{88} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q''_1 \\ q''_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q''_8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & K_{18} \\ K_{21} & K_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & K_{28} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_{81} & K_{82} & \cdot & \cdot & \cdot & K_{88} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Q_8 \end{bmatrix} \quad (18)$$

## 1.2 基于 IBM 的流固耦合模型

前两章介绍了两个单独的求解器（流体和固体）。现在，本章介绍如何将这些求解器耦合在一起，以实现流体-结构相互作用仿真。本章的第一部分详细介绍了如何通过浸入式边界方法（IBM）将移动的结构边界耦合到固定的 LBM 网格。第二部分描述了非共点的浸入边界和有限元网格之间的数据映射方法。最后，介绍完整的算法实现。

### 1.2.1 浸入式边界法（IBM）

浸入边界法 CFD 的主要难题之一是网格生成。当考虑复杂的几何形状或移动边界时，这会更加复杂。浸入式边界方法（IBM）试图通过将流体方程的解与边界解耦也解决这一问题。IBM 最初由 Peskin[30]开发进行人体心脏建模，IBM 通过在流体控制方程中引入源项（力）来模拟边界效应。通过这组力，流体对施加的运动学约束做出响应，这可以表示一系列边界条件（例如防滑、滑动、固定、移动、弯曲等）。在本报告中，IBM 主要被用于刚性和变形边界上施加防滑条件。

IBM 使用两个独立的网格来表示流体和固体边界，每个网格都有自己的参考框架。流体在欧拉网格上定义，该网格是笛卡尔坐标系，并且在空间中固定。另一方面，固体边界由拉格朗日曲线网格表示，该网格由离散点组成，可以在流体网格中自由移动。由于网格是独立的，因此 IBM 的主要挑战是确保数据之间准确而有效的通信。此外，由于格点之间无法完全重合，因此该数据传输需要专门的插值/传递算子。然后再将所需的边界条件重新构造为作用力，以施加所需的运动学。由于边界是在拉格朗日框架中定义的，因此必须在此框架中计算力并将其传递回欧拉网格。一旦力被传递回去，流体方程将在整个域中求解，无需在界面进行任何特殊的边界处理（除力场以外）。

IBM 的主要优势之一是流体方程的解与固体边界分离。这极大地简化了网格的生成，并允许像对待简单的刚性几何体一样容易地处理经历大变形的任意复杂的几何体，而无需连接底层的流体网格。这样也就消除了网格质量差和重新生成网格耗时的弊端。但是，IBM 确实也存在某些缺点。插值/扩散算子会在空间中的流体区域上匹配边界，有可能导致边界使用不当，无法提高数值模拟精度。因此，正确解决边界层的插值和传递过程至关重要。

### 1.2.2 插值和传递

IBM 使用两个坐标系：用于流体的欧拉系统和用于边界的拉格朗日系统。分别在欧拉框架  $\mathbf{x}(x, y, z) \in \Omega$  和拉格朗日框架  $\mathbf{X}(q, r, s) \in \mathcal{T}$  使用小写和大写符号方便区分。

通过狄拉克函数，我们可以建立它们之间的关系：

$$\Phi(\mathbf{X}) = \mathcal{I}[\phi(\mathbf{x})] = \int_{\Omega} \phi(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}) d\mathbf{x} \quad (19)$$

$$\phi(\mathbf{x}) = \mathcal{S}[\Phi(\mathbf{X})] = \int_{\mathcal{T}} \Phi(\mathbf{X}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}) d\mathbf{X} \quad (20)$$

其中， $\phi$  是在欧拉坐标系下定义的参数， $\Phi$  是在拉格朗日坐标系下定义的参数。

将上面两个公式写成离散形式：

$$\Phi(\mathbf{X}) = \mathcal{I}[\phi(\mathbf{x})] = \sum_{\Omega_s} \phi(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}) \Delta x \Delta y \Delta z \quad (21)$$

$$\phi(\mathbf{x}) = \mathcal{S}[\Phi(\mathbf{X})] = \sum_{\mathcal{T}_s} \Phi(\mathbf{X}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}) \epsilon \Delta q \Delta r \Delta s \quad (22)$$

狄拉克函数  $\delta$  采用离散化的形式， $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 1$ 。

离散狄拉克 Delta 函数的选择至关重要，因为它决定着欧拉网格和拉格朗日网格之间的通信，并且插值和扩展步骤都必须相同。已经提出了各种约束集合，其定义了用于生成该运算符的新形式的规则[31]。尽管这些约束条件有所不同，但通常，离散狄拉克增量函数必须在两个参考系中保持线性和角动量。已经提出了离散狄拉克三角函数的几种变体，其中一些如图 22 所示。本文采用的形式是 Roma 等人提出的三点式模型：

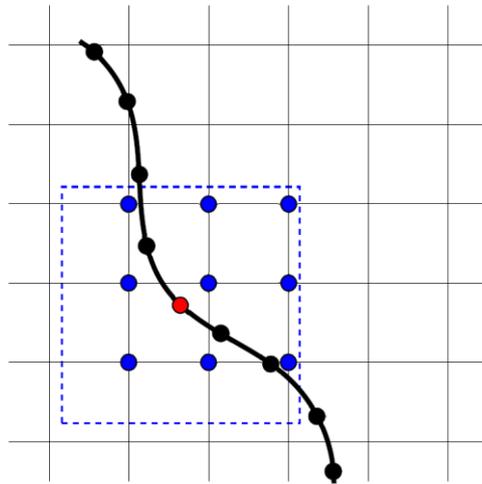


图 22 三点式模型示意图[31]

$$\delta(r) = \begin{cases} \frac{1}{3}(1 + \sqrt{-3r^2 + 1}), & |r| \leq 0.5 \\ \frac{1}{6}(5 - 3|r| - \sqrt{-3(1 - |r|)^2 + 1}), & 0.5 \leq |r| \leq 1.5 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (23)$$

最后一步，结合公式 62-63，获得：

$$\Phi(X_n) = \sum_{m=1}^N A_{n,m} \epsilon_m \phi(X_m) \quad (24)$$

其中，

$$A_{n,m} = \Delta s \sum_{\Omega} \tilde{\delta}(x - X_n) \tilde{\delta}(x - X_m) \quad (25)$$

以矩阵表示法为：

$$A\epsilon = 1 \quad (26)$$

最终，通过计算系数 $\epsilon$ 再回代方程完成坐标系转换。

### 1.2.3 LBM-FEM-IBM 流固耦合算法

接下来，我们简要阐述耦合的 LBM-IBM 算法。具体算法可参考 Li[32]等人。

在 LBM 算法中，宏观的流体速度由下式给出（包含力源项）：

$$\rho \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_i \mathbf{c}_i f_i(\mathbf{x}, t) + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (27)$$

经过一轮的 LBM 计算后，得到更新的分布函数 $f$ 和密度 $\rho$ 。因此，公式右侧的两个项可以分解为预测速度场和力校正项：

$$\rho \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \rho \mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t) + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (28)$$

由于边界处的流体速度必须等于边界速度，因此 $U^b = \mathcal{J}[u]$ ，因此可以将上述转换为拉格朗日框架，得出：

$$\mathcal{J}[\rho(\mathbf{x}, t)] \mathbf{U}^b(\mathbf{X}, t) = \mathcal{J}[\rho \mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t)] + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \quad (29)$$

由于边界速度 $U^b$ 是已知的，因此可以重新排列并求解校正 $\mathbf{F}$ 。然后，作用力通过扩散算子传递回欧拉框架：

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{S}[\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)] \quad (30)$$

最后，通过将校正力添加到预测速度场中来更新速度场。

总结上述过程，刚体 LBM-IBM 算法如下所示：

1. 执行 LBM 步骤以获取密度和预测速度场；

2. 将预测动量和密度场插值到 Lagrangian 上通过插值算子标记;
3. 通过方程 70 计算拉格朗日框架中的校正力;
4. 通过扩散算子将校正力传播回欧拉网格;
5. 通过方程 69 作用力校正预测速度场。

### 1.2.4 算法验证

该测试案例是测试流体-结构相互作用求解器的非定常流动。该案例最初由 Turek & Hron [33]提出, 由一个刚性圆柱体和一个嵌入在通道流中的柔性板组成, 如图 23 所示。在入口处指定了抛物线速度曲线, 在通道壁处使用防滑条件。图 1 显示了计算域的示意图。圆柱体的位置偏离通道中心, 以使不稳定性自然发展。原始基准提供了三个不同雷诺数的数据 (基于圆柱体的直径)。在这里, 我们给出中等雷诺数 ( $Re = 100$ ) 情况下的仿真。这种情况下的流动条件如下:

- 平均速度= 1.0 m / s;
- 密度= 1000 kg/m<sup>3</sup>;
- 动力粘度= 0.001 m<sup>2</sup> / s;
- 雷诺数= 100;

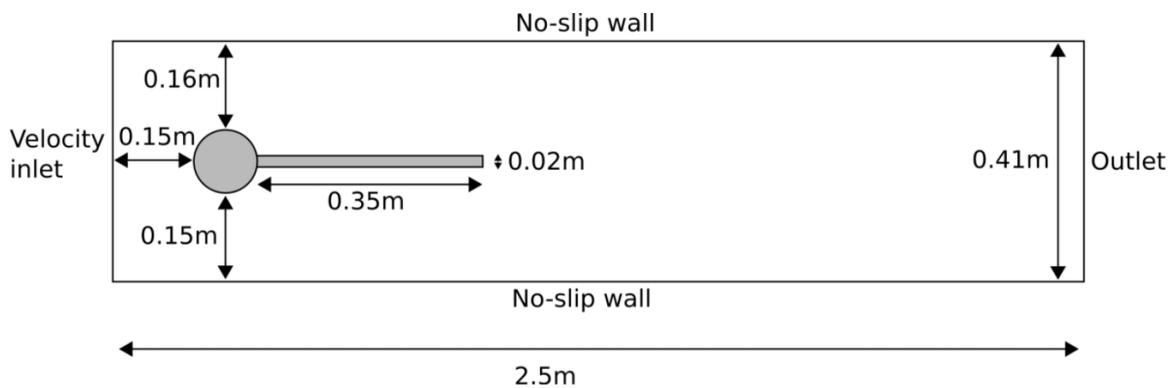


图 23 Turek & Hron 模型示意图

图 24 和 25 显示了在中等雷诺数情况下获得的速度和涡度分布。

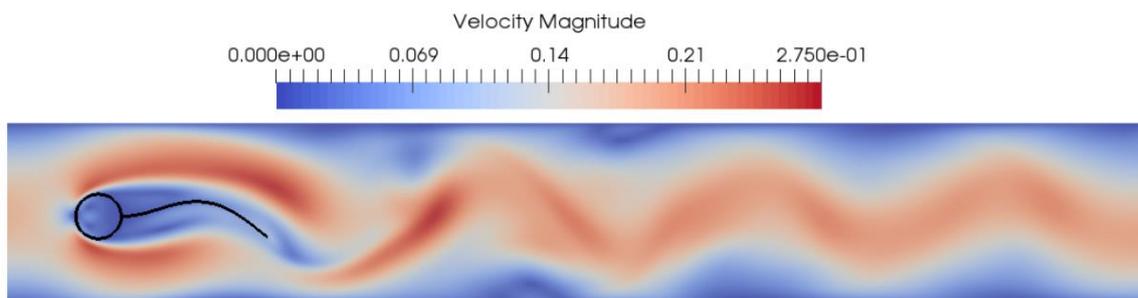


图 24 中等雷诺数情况下获得的速度分布

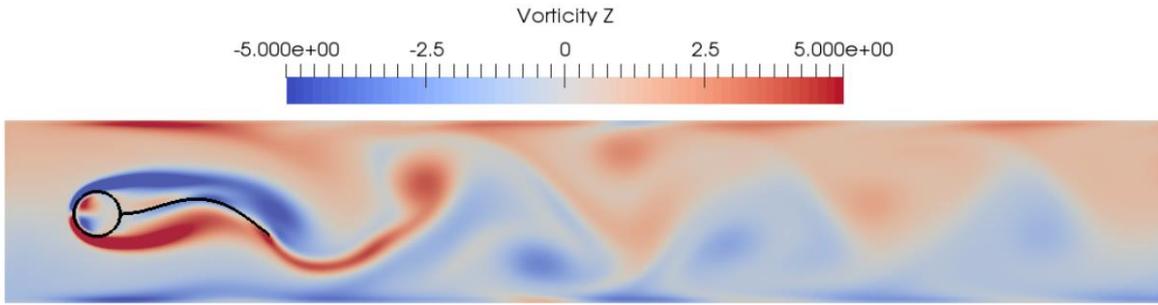


图 25 中等雷诺数情况下获得的涡度分布

### 1.3 叶顶泄露涡对结构振动的影响

#### 1.3.1 简化的叶顶泄漏流模型

叶顶泄漏涡是叶片工作面与背面的压差以及叶片轮缘与机匣之间相对运动作用下形成的并随主流卷吸影响流道内部流场结构。虽然该区域工况相对复杂，但抓住影响叶顶泄露流动的主要因素，可以大大地简化模型，有利于实际工程的应用。其中，具有代表性的叶顶泄漏流模型有 Rain 模型[34]、Kirtley 模型[35]、Chen 模型[1]、Lakshminaryana 模型[36]等。

这里，结合我们 LBM 仿真的工作，我们主要介绍并应用 Chen 模型，利用该模型可以很好地预测叶顶泄漏涡的轨迹。考虑压气机叶片细长结构，可以从二维不稳定的流动的角度对其进行建模。在连续的横流平面（垂直于叶片外倾角的平面）中，可以将尖端间隙流的产生和累积视为不稳定过程。

如图所示，Chen 模型主要是将通道内的三维定常流动简化成为  $S_3$  流面上的二维非定常流动考虑分别在弦向不同的位置 a, b, c 和 d 处的错流平面 A, B, C 和 D。

其核心思想是将利用相似性原理将时间和空间建立联系，即时间  $t$  和流向位置  $s$  之间的转换是  $dt = ds/U$ ， $U$  为叶片移动的速度。相应类比，在不同的错流平面中的流动模式类似于二维非定常流动。因此，图 26 顶部的四个错流平面中的速度由图下部所示的四个不同时间处的非恒定流表示。

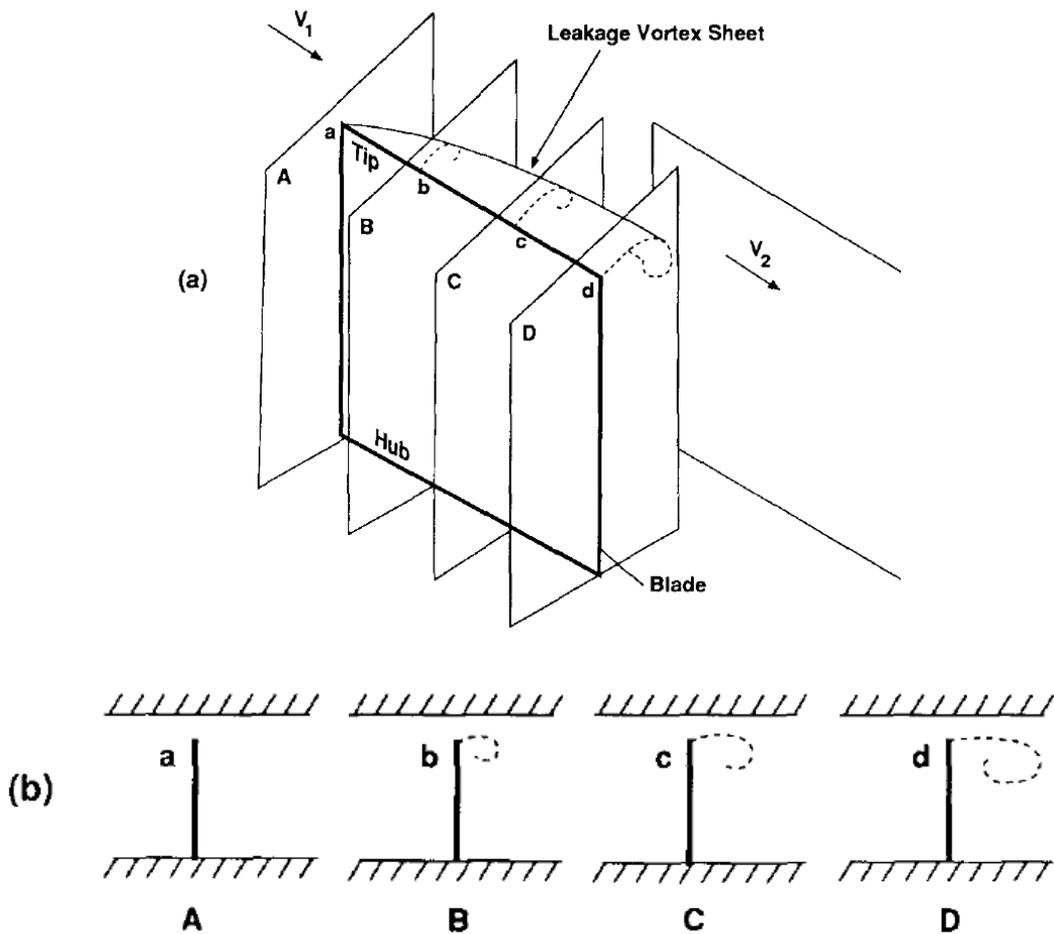


图 26 Chen 模型示意图[1]

### 1.3.2 细长条流场非定常仿真

根据 Chen's 模型，我们需要精确仿真二维细长条流场。这也是 LBM 方法在处理该问题的擅长之处。除仿真单个通道外，还可以考虑多个通道之间的相互作用，同时也考虑结构变形的影响。

类比实际研究压气机 29 个叶片模型，图 27 为充分发展的相对速度分布。在相对坐标系下，叶片轮缘与机匣之间相对运动作用下形成的并随主流卷吸影响流道内部流场结构。图 28 为放大以后两个通道的细节展示。该结果验证 Cascade LBM 方法能很好地模拟泄露涡的卷吸过程。为放大结构变形的影响，我们将减小固体的杨氏模量。在涡流产生的同时，也会与叶顶相互作用，使之变形。

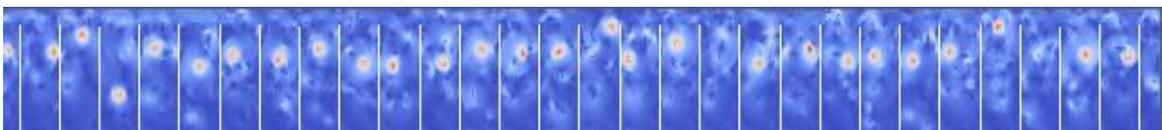


图 27 多通道叶顶间隙流非定常仿真 (相对速度)

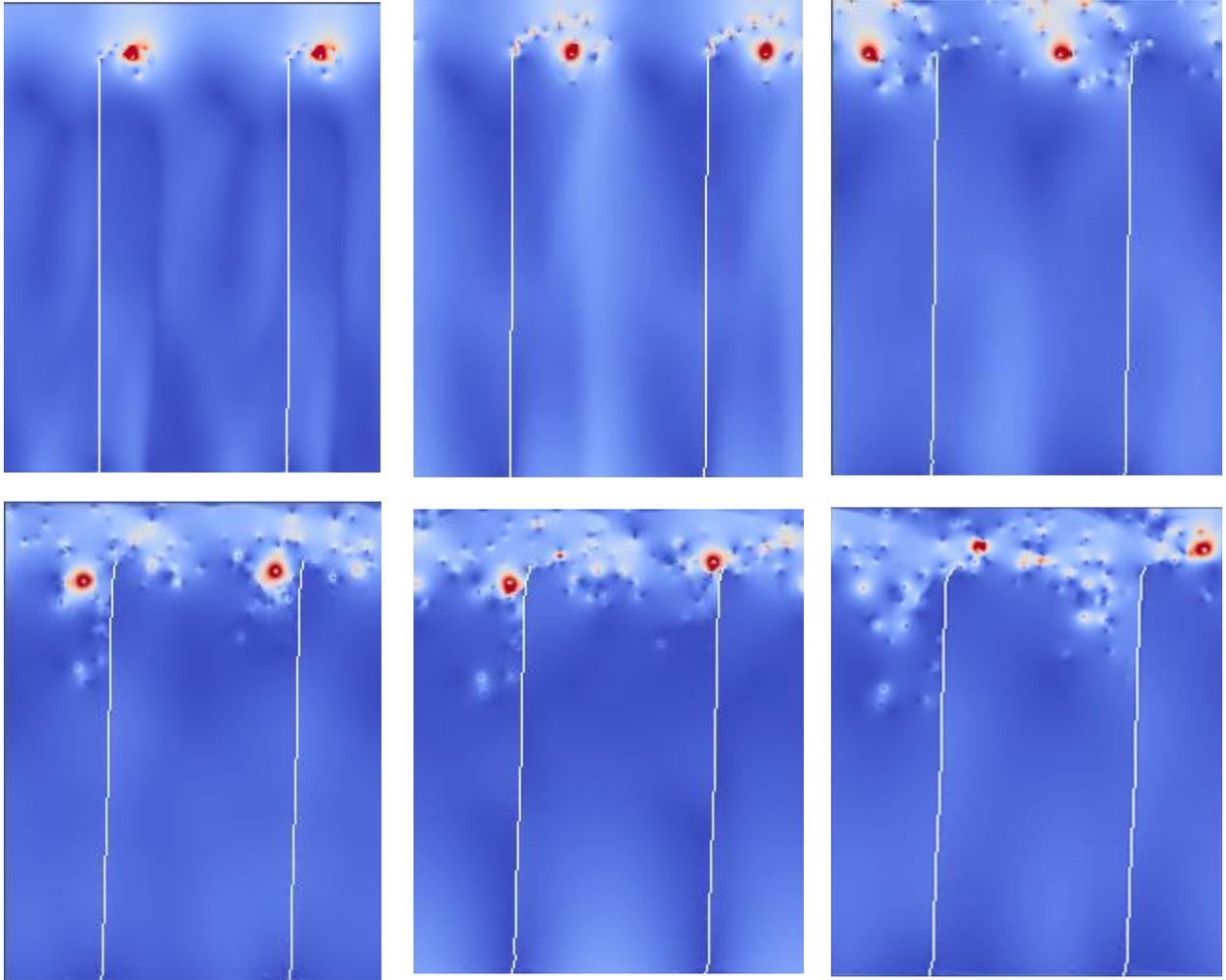


图 28 叶顶间隙脱落涡演化规律 (相对速度)

### 1.3.3 前缘分离涡和尾涡

前缘涡脱落和尾迹的影响也是至关重要的。相应的，我们也采用二维平板对其进行简化。传统算法在考虑转静干涉需要拼接网格。而这里采用的算法没有这个问题。考虑固体运动且不改变网格的情况下，仿真转子和静子干涉带来的影响。

如图 29 所示，动叶从右往左“切割”流场，在叶顶前缘流体与边界相互作用，产生漩涡。该涡团会依附前缘吸力面沿着弦长方向运动，并在一定距离后脱落，并在整个通道内发展。尾涡类似卡门涡街自然脱落，不断往下游发展。图 30 为放大以后两个通道的细节展示，反映前缘分离涡的演化规律。

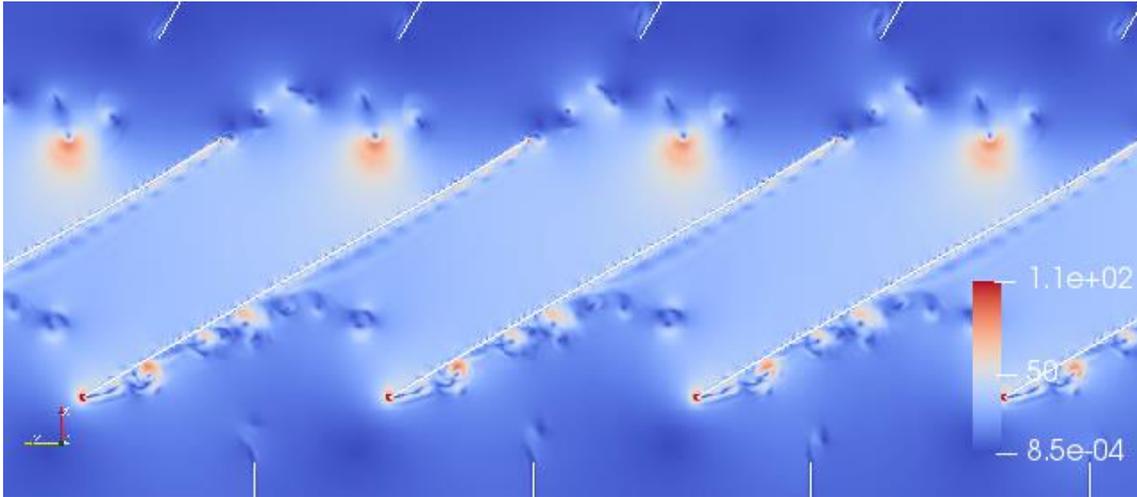


图 29 多通道前缘分离涡和尾涡非定常仿真 (相对速度)

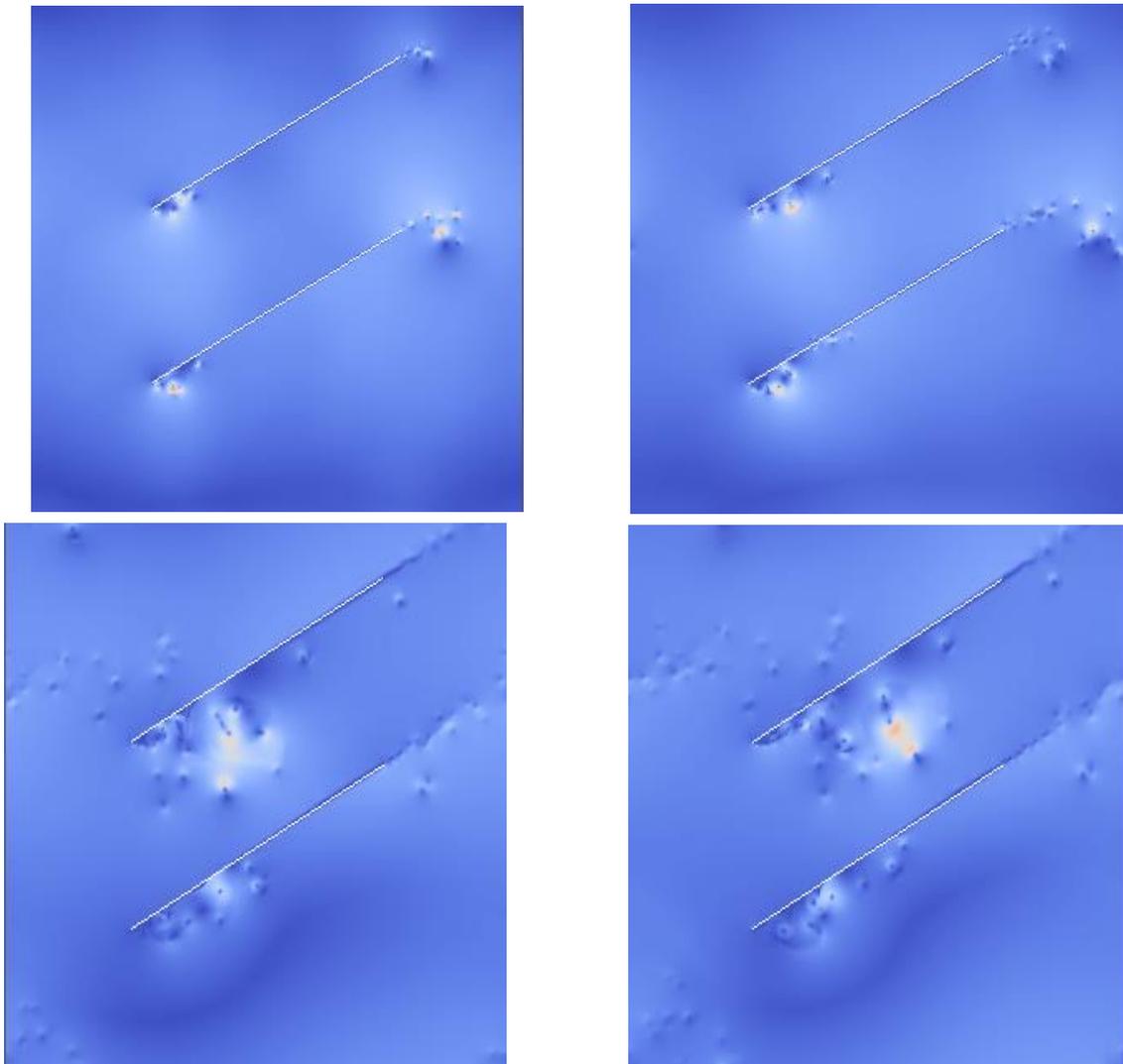


图 30 前缘分离涡演化规律 (相对速度)